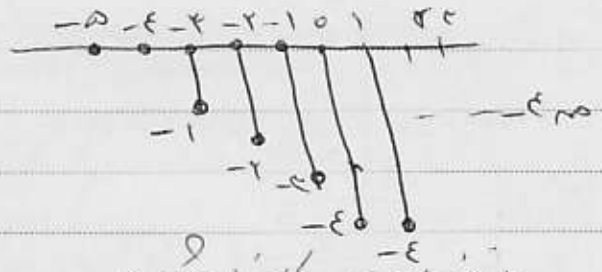
Subject
Date

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < -3 \\ -n-4 & -3 \le n < 0 \\ -4 & n \ge 0 \end{cases}$$



"خواص کانولوشن"

عمدتاً کانولوشن خواص دارد

۱ـ جابه‌جایی

۲ـ شرکت‌پذیری

۳ـ توزیع‌پذیری

① $x(t) * h(t) = h(t) * x(t) =$ جابه‌جایی

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau} = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau}$$

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

Subject
Date

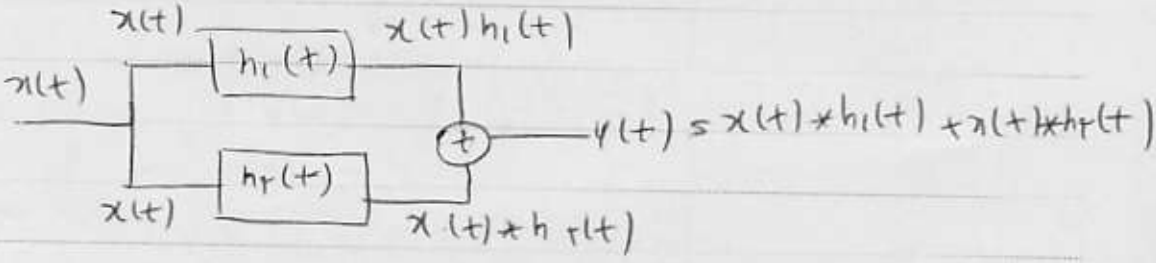
② خاصیت توزیع پذیری

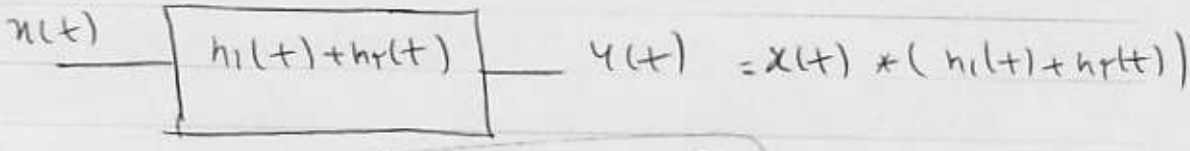
$$\boxed{x(t) * (h_1(t) + h_2(t))} \boxed{= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)}$$

هر طرف ساده تر است از آن طرف استفاده می کنیم

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

توزیع پذیری مصداقی از ستون موازی سیستم ها است.





⇐ خاصیت توزیع پذیری تعبیری از موازی شدن سیستم ها است.

مثال. $h[n] = \underbrace{r^n u[n]}_{h_1} + \underbrace{(1/2)^n u[-n]}_{h_2}$

می توانیم از خاصیت توزیع پذیری استفاده کنیم تا ساده تر حل شود.

③ خاصیت شرکت پذیری

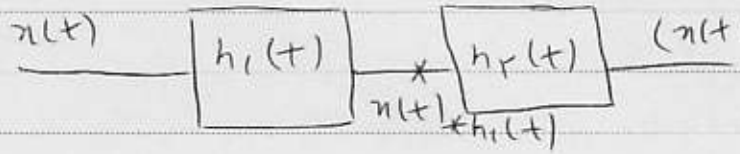
$$\boxed{x(t) * (h_1(t) * h_2(t))} \boxed{= (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)}$$

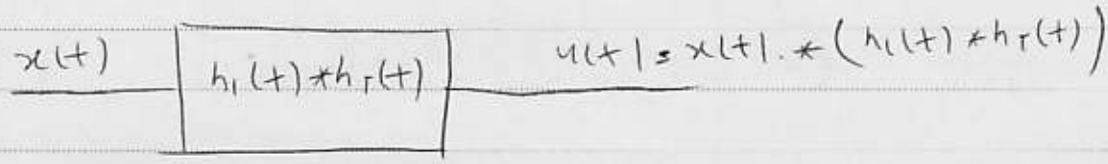
$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

PAPCO

Subject
Date

خاصیت شرکت پذیری تعدادی از بلوک های سیستم هاست .





خواص سیستم های LTI بدون حافظه

- حافظه داری
- معکوس پذیری
- پایداری
- علی بودن

سیستم LTI را بدون حافظه می گوییم که اگر $h[n] = 0 \Leftarrow n \neq 0$ (به ازای تمام مقادیر n صفر باشد)

if $n \neq 0$ $h[n] = 0$ در غیر اینصورت حافظه دار
if $t \neq 0$ $h(t) = 0$ اگر .

if $h[n] = k\delta[n]$ k فقط یک ضریب است

بدون حافظه است

if $h(t) = k\delta(t)$

به ازای تمام نقاط غیر از صفر اگر مقدار داشت حافظه دار است

Subject
Date

اگر $K=1$ $\Rightarrow$ ورودی همان خروجی است یعنی همانی است

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=\delta(t)} \longrightarrow x(t)$$

مثال. $y(t) = x(t) + x(t-1)$

$x(t) = \delta(t)$ اگر به جای $x(t)$ ← $\delta(t)$ بگذاریم خروجی

$h(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$ پاسخ ضربه سیستم است.

حافظه دار است.

در لحظه‌ای غیر از صفر مقدار دارد.

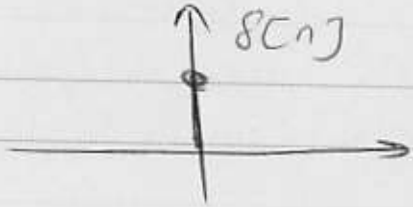
$h(t) = u(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$ حافظه دار

مثال. $h[n] = u[n] - u[n-1]$

بدون حافظه



PAPCO

Subject
Date

معکوس پذیری

$$\boxed{h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)}$$

$$\boxed{h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]}$$

پاسخ ضربه سیستم وارون پاسخ ضربه سیستم اصلی

مثال . $y(t) = x(t - t_0)$

$h_1(t) = \delta(t - t_0)$

$h_2(t) = \delta(t + t_0)$

$$h_1(t) * h_2(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0)$$

باید بدست بیاوریم

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0)\, \delta(t + t_0 - \tau)\, d\tau$$

$\tau = t + t_0$

$$= \delta(t + \cancel{t_0} - \cancel{t_0})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$$

$t = t_0$

Subject
Date

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad \text{پایدار است} \end{array}}$$

پایداری

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]| \underbrace{h[n-k]}_{<\infty} = \sum h[k]x[n-k] < \infty$$

$$\boxed{|h[k]| < \infty}$$

$x[k]$ اگر کران دار است
ضرب هم باید کران دار باشد.

مثال. $h(t) = e^{-(1-e^{2j})t} u(t)$

پایداری را بررسی کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-t} \cdot e^{2jt} u(t) \right| dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \overset{r}{e^{-t}} \cdot e^{2jt} \right| dt = \int_{0}^{+} e^{-t} dt$$

$$= \frac{e^{-t}}{-1} \Big|_{0}^{\infty} = 0 - (-1) = 1 < \infty$$

$\Rightarrow$ پایدار است

PAPCO

Subject
Date

مثال. $h(t) = \cos \pi t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \cos \pi t \quad u(t) \right| dt$$

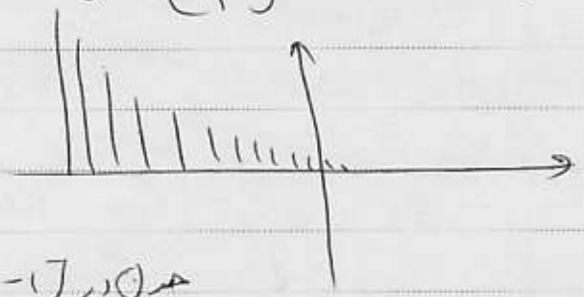
$$\int_{0}^{+\infty} |1| \, dt = t \Big]_{0}^{\infty} = \infty$$ ناپایدار

علی بودن

$$\boxed{\text{if} \quad n < 0 \quad h[n] = 0}$$

$$\boxed{\text{if} \quad t < 0 \quad h(t) = 0}$$

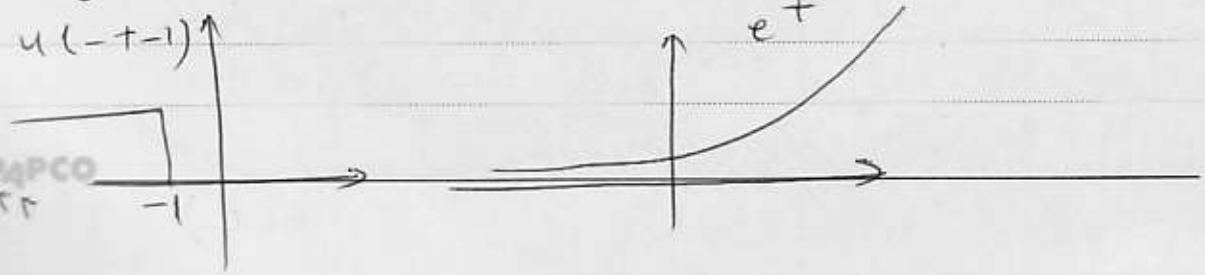
مثال. $h[n] = [1.4]^n u[n-1]$



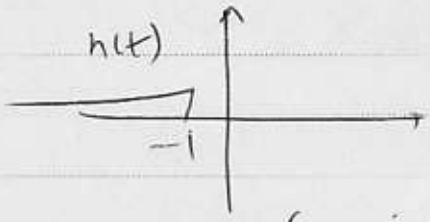
چون در $u[n-1]$ ضرب می‌شود
بعد از صفر فقط مقدار دارد.

علی است $h[n]$

مثال. $h(t) = e^{t} u(-1-t)$



Subject
Date



علّی نیست.

آنالیز فوریه (سری فوریه، تبدیل فوریه)

e^{st} سیگنال پایه سیگنال نمایی مختلط پیوسته در زمان

z^n " " " گسسته در زمان

تعریف تابع ویژه و مقدار ویژه:

وقتی که وارد سیستم می‌شود ضرب می‌شود a برابر سیگنال ورودی است. سیگنال‌ها را تابع ویژه گویند که به ازای آن ورودی و خروجی سیستم Q برابر ورودی باشد. (a می‌تواند مختلط یا صحیح باشد) ضریب a فقط دامنه سیگنال ورودی را تغییر می‌دهد.

$x(t) = e^{st}$ که ضریب را مقدار ویژه گویند.

در پیوسته در زمان

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

ضرب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau}_{H(s)}$$

سیگنال تابع نمایی که به ورودی وارد شود با یک ضریب از سیستم خارج می‌شود. ضریب

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$x[n] = z^n$ در گسسته در زمان

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{n-k} = z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}}_{H(z)}$$

سیگنال ورودی

Subject
Date

$$\boxed{H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}}$$

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}$$

پیوسته زمان

$x(t) = e^{st}$ $\qquad$ $y(t) = H(s)\, e^{st}$

گسسته زمان

$x[n] = z^{n}$ $\qquad$ $y[n] = H(z)\, z^{n}$

تابع ویژه مقدار ویژه

$y(t) = x(t-4)$ $\qquad$ ورودی اگر نمایی باشد e^{st}

$x(t) = e^{2jt}$

$y(t) = e^{2j(t-4)} = e^{2jt} \cdot e^{-8j} \Rightarrow s = 2j$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-4)\, e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-s(4)} = e^{-8j}$$

$h(t) = \delta(t-4)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t-t_0) = x(t_0)}$$

Subject
Date

$$\left.\begin{array}{l} S = jk\omega_0 \\ S = j\omega \\ S = \sigma + j\omega \end{array}\right\} e^{st}$$

S می‌تواند یک مقدار حقیقی یا موهومی محض یا مختلط باشد.
اگر S یک مقدار موهومی باشد.

ω فرکانس سیگنال‌های ضربه‌ای از یک فرکانس پایه باشد. سیگنال که با ما می‌دهد یک سیگنال نمایی سینوسی متناوب است ← سری فوریه (تحلیل از طریق)

$S = jk\omega_0$ ← سیگنال نمایی سینوسی متناوب ← سری فوریه

$S = j\omega$ ← " " غیر متناوب ← تبدیل فوریه (تحلیل)

$S = \sigma + j\omega$ ← تبدیل لاپلاس (فقط برای مقادیر پیوسته است)

تبدیل Z فقط برای مقادیر گسسته است.

با ترکیب خطی سیگنال‌های پایه سیگنال‌های دیگر را نیز می‌توانیم داشته باشیم.

$$x(t) = \underbrace{a_1 e^{s_1 t}}_{x_1} + \underbrace{a_2 e^{s_2 t}}_{x_2} + \underbrace{a_3 e^{s_3 t}}_{x_3}$$

سه سیگنال نمایی جداگانه با هم ترکیب خطی شده‌اند.

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

خروجی هم به صورت ترکیب خطی سیگنال‌های است به طوری که ضریبی را به خودش می‌گیرد

PAPCO

Subject
Date

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

پیوسته در زمان

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z_k^n$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(z_k) z_k^n$$

گسسته در زمان

دوره تناوب

$$x(t) = x(t+T)$$

$\cos \omega_0 t$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$e^{j\omega_0 t}$

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm N$$

هارمونیک سیگنال

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{e^{jk\omega_0 t}}_{\phi_k(t)}$$

$k=0 \longrightarrow a_0$

مولفه های اول هارمونیک

$k=1 \longrightarrow a_{+1}$

$k=-1 \longrightarrow a_{-1}$

مولفه های دوم هارمونیک

$k=2 \longrightarrow a_2$

$k=-2 \longrightarrow a_{-2}$

Subject
Date

اگر $k=0$ ← $a_0 e^{0}$ که خط صاف می‌شود

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}}$$

مثال:

$$x(t) = \sum_{k=-4}^{k=+4} a_k e^{jk2\pi t}$$

فرکانس پایه 2π است $\omega_0 = 2\pi$

در تحلیل سری فوریه این ضرایب را از ما می‌خواهند.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1, a_{-1} = 1/4 \\ a_2, a_{-2} = 1/2 \\ a_4, a_{-4} = 1/4 \end{cases}$$

این مثال برای فهم بهتر این مطلب است که چگونه ضرایب باعث تغییر دامنه می‌شود.

$$x(t) = 1 + 1/4\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + 1/2\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) + 1/4\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

در رابطه اویلر $\cos\alpha$ را به صورت:

$$\boxed{\frac{e^{\alpha j} + e^{-\alpha j}}{2}}$$

نشان دهیم و $\sin\alpha$ را به صورت:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{e^{\alpha j} - e^{-\alpha j}}{2j}}$$

نشان می‌دهیم.

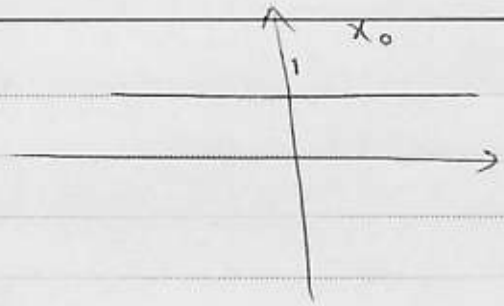
$$x(t) = \underbrace{1}_{x_0} + \underbrace{1/4 \cos\alpha}_{x_1} + \underbrace{\cos 4\pi}_{x_2} + \underbrace{2/4 \cos 6\pi t}_{x_4}$$

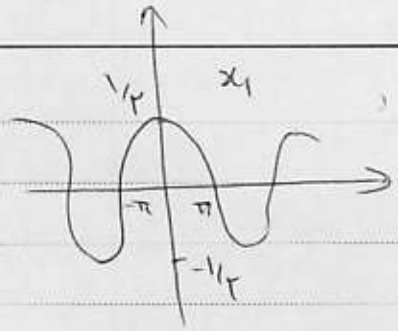
هر کدام از x ها یک سیگنال است.

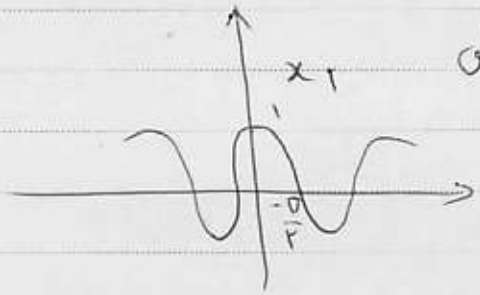
همه با هم جمع شدند و $x(t)$ را ساختند.

PAPCO

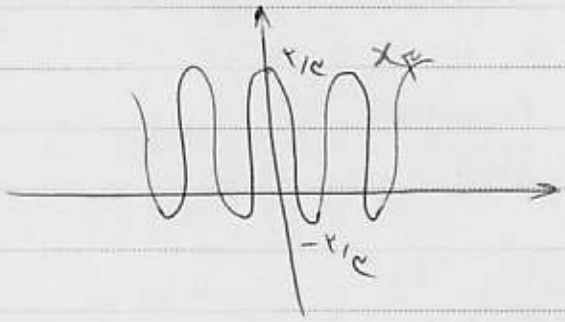
Subject
Date



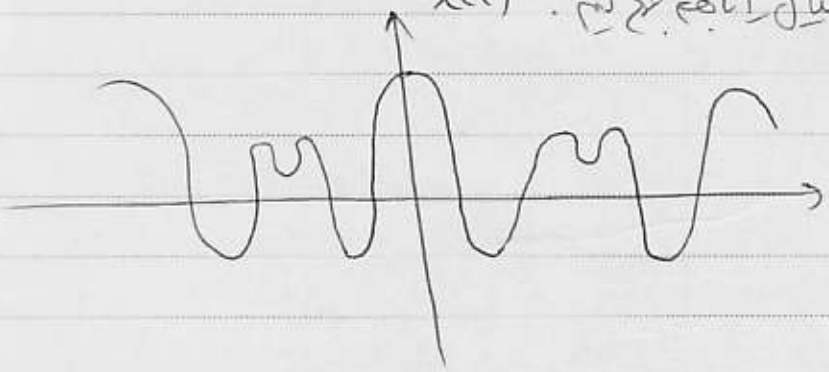




دامنه دو برابر و فرکانس
نصف شده
نسبت به x_1



اگر این ۴ سیگنال را با هم جمع کنیم. $x(t)$



در مسئله‌ها ضرایب را می‌خواهند.

Subject
Date

مثال- $x(t)$ ضرایب سری فوریه $x(t) = \sin \omega_0 t$ را بدست آورید.

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_1} e^{j\omega_0 t} - \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_{-1}} e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_k \begin{cases} 1/2j & k=1 \\ -1/2j & k=-1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

$$= \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$= \overset{k=1}{1/2\, e^{j\omega_0 t}} + \overset{k=-1}{1/2\, e^{-j\omega_0 t}}$$

$$a_k = \begin{cases} 1/2 & k = \pm 1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

* اثبات در امتحان نمی‌آید.

مثال. ضرایب a_k سری فوریه را بدست آورید

$$x(t) = \sin\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \pi/4)$$

$$= \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \frac{e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}}{2}$$

$$= e^{j\omega_0 t}\overbrace{\left(\frac{1}{2j} + 1\right)}^{a_1} + e^{-j\omega_0 t}\overbrace{\left(-1/2j + 1\right)}^{a_{-1}} + e^{2j\omega_0 t}\underbrace{\left(1/2\, e^{j\pi/4}\right)}_{a_2} + e^{-2j\omega_0 t}\underbrace{\left(1/2\, e^{-j\pi/4}\right)}_{a_{-2}}$$

بدست آوردن ضرایب همیشه از طریق رابطه اویلر جواب نمی‌دهد ← رابطه‌ای باید وجود داشته باشد تا از طریق آن و نیز ضرایب را بدست آوریم.

فرمول بدست آوردن ضرایب سری فوریه:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$$

اثبات در کتاب هست
اثبات در امتحان نمی‌خواهد

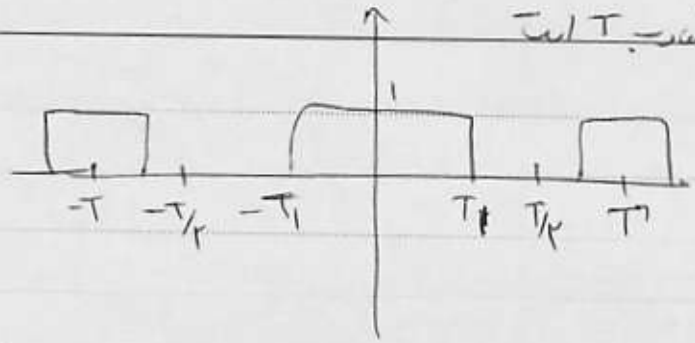
$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt}$$

در صورتی که سیگنال متناوب باشد.

Subject
Date

دوره تناوب T است

مثال.



$a_0 , a_K = ?$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt$$

$$= \frac{1}{T}(T_1 + T_1) = \boxed{\frac{2T_1}{T}} \longrightarrow a_0$$

$$a_K = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\times e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\times\frac{1}{-jk\omega_0}\,e^{-jk\omega_0 t}\Big]_{-T_1}^{T_1}$$

$$= \frac{1}{\cancel{T}\,jk\,\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\left(e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi k j}\left(e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}\right)$$

$$a_K = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$a_0 = \frac{2T_1}{T} \qquad a_K = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

PAPCO

Subject
Date

سری

آندر فند سیگنال در هم ضرب شده اند یا جمع شده باشند با استفاده از خواص

سری فوریه ضرایب سری فوریه را می توانیم بدست بیاوریم.

خواص سری فوریه

۱- خطی بودن

$$x(t) \xrightarrow{F_s} a_k$$

$$y(t) \xrightarrow{F_s} b_k$$

$$z(t) \xrightarrow{F_s} c_k$$

$$z(t) = A x(t) + B y(t) \xrightarrow{F_s} \boxed{c_k = A a_k + B b_k}$$

۲- جابجایی زمانی

$$x(t) \xrightarrow{F_s} a_k$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{F_s} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

اثبات: $y(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{F_s} b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$t - t_0 = \tau$$

PAPCO

Subject
Date

$t = t + \tau$ تغییر متغیر $dt = d\tau$

$$b_K = \frac{1}{T}\int_T \underbrace{x(\tau)\, e^{-jK\omega_0(t_0+\tau)}}_{e^{-jK\omega_0 t_0}\cdot e^{-jK\omega_0\tau}}\, d\tau$$

$$b_K = e^{-jK\omega_0 t_0}\underbrace{\frac{1}{T}\int x(\tau)\, e^{-jK\omega_0\tau}\, d\tau}_{a_K}$$

۱- خاصیت وارونگی زمانی

$x(t) \xrightarrow{F_s} a_K$

$x(-t) \xrightarrow{F_s} a_{-K}$

$\boxed{\text{if } x(t) = x(-t)}$ سیگنال زوج $\Rightarrow \boxed{a_K = a_{-K}}$

$\boxed{\text{if } x(t) = -x(-t)}$ " فرد $\Rightarrow \boxed{a_K = -a_{-K}}$

۲- خاصیت کانولوشن

$x(t) \xrightarrow{F_s} a_K$

$y(t) \xrightarrow{F_s} b_K$

$z(t) \xrightarrow{F_s} c_K$

$x(t)$ و $y(t)$ باید دوره‌ی تناوب یکسان داشته باشند تا از این خاصیت بتوانیم استفاده کنیم.

$z(t) = x(t) \times y(t) \longrightarrow \boxed{c_K = a_K * b_K}$

$$= \sum_{L=-\infty}^{+\infty} a_L \cdot b_{K-L}$$

اگر $z(t) = x(t) * y(t) \xrightarrow{F_s} c_K = T\, a_K b_K$

اگر $z(t)$ از ضرب دو سیگنال به دست بیاید ضرایب از کانولوشن ضرایب آن سیگنال ها به دست می آید. و یا اگر $z(t)$ از کانولوشن به دست بیاید ضرایب آن از ضرب ضرایب به دست می آید.

مثال. $x(t) = \sin 4\pi t \xrightarrow{F_s} a_k$

$y(t) = \cos 6\pi t \xrightarrow{F_s} b_k$

$z(t) = x(t) * y(t)$

$4\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 1/2$

بنابراین از خاصیت کانولوشن می توانیم استفاده کنیم.

$$C_k = T \cdot a_k \cdot b_k$$

$$C_k = 1/2 \times \begin{cases} 1/2j & k=1 \\ -1/2j & k=-1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases} \times \begin{cases} 1/2 & k=1 \\ 1/2 & k=-1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$C_k = \begin{cases} 1/8j & k=1 \\ -1/8j & k=-1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

مثال دوم، مشابه مثال اول با کانولوشن

Subject
Date

۵- خاصیت مشتق‌گیری

$$x(t) \xrightarrow{F_S} a_K$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F_S} \boxed{jK\omega_0 a_K}$$

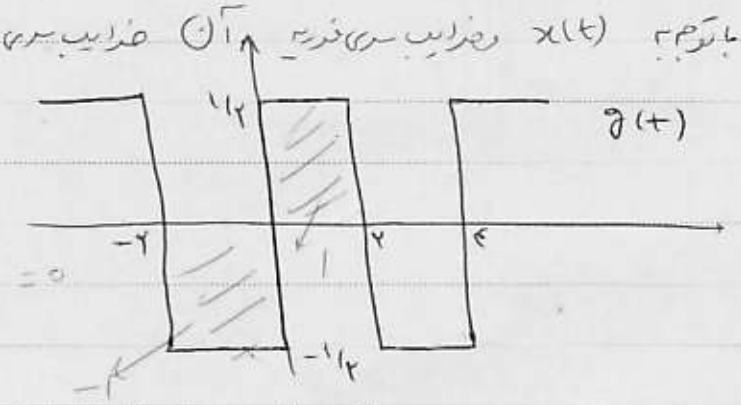
$$\int x(t)\,dt \xrightarrow{F_S} \boxed{\frac{a_K}{jK\omega_0}}$$

۶- رابطه پارسوال

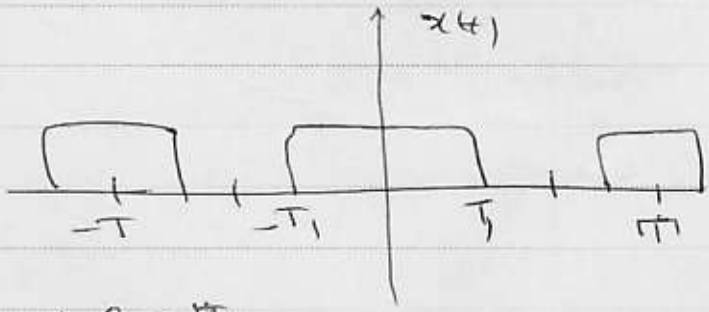
$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} |a_K|^2$$

$$\left| a_K e^{jK\omega_0 t} \right|$$

* مثال: با توجه به $x(t)$ و ضرایب سری فوریه آن ضرایب سری فوریه $g(t)$ را بدست آورید



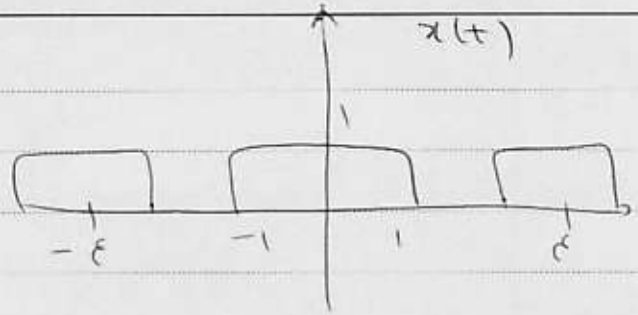
$$d_0 = 1 - 1 = \frac{0}{T} = 0$$



$x(t)$ را بدست آورید

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2T_1}{T} \\ a_K = \dfrac{\sin(K\omega_0 T_1)}{K\pi} \end{cases}$$

Subject
Date



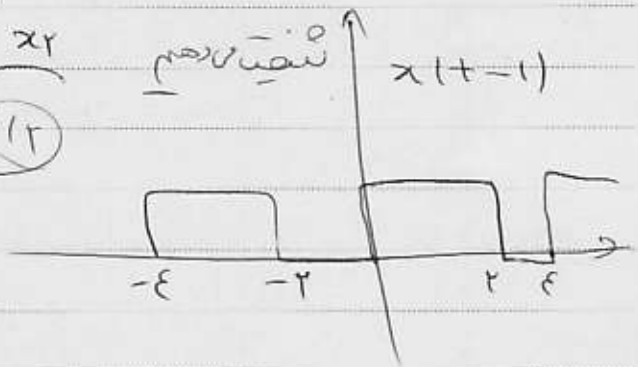
اگر $\longrightarrow T_1 = 1 \quad T = 4$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi/2$$

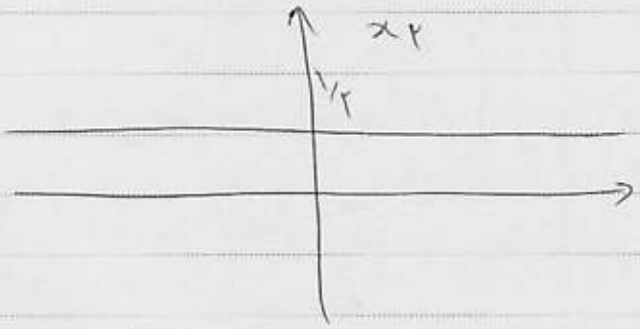
$$\begin{cases} a_0 = 2/4 = 1/2 \\ a_k = \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \end{cases}$$

$$g(t) = \overbrace{x(t-1)}^{x_1} - \overbrace{1/2}^{x_2}$$

ثابت می‌دهیم



یک سیگنال است.



$$g(t) \xrightarrow{F_s} a_k$$

$$x(t) \xrightarrow{F_s} a_k$$

Subject
Date

$$x_1 = x(t-1) \xrightarrow{t-t_0} b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} \qquad a_k = e^{-jk\pi/2} b_k$$

$$x_2 \xrightarrow{F_s} c_k$$

$$d_k = b_k - c_k$$

$$b_k \begin{cases} b_0 = 1/2 \\ b_k = \dfrac{e^{-jk\pi/2} \sin(k\pi/2)}{k\pi} \end{cases}$$

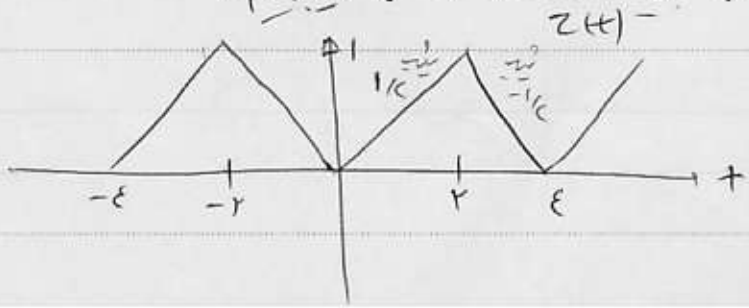
$$c_k = \begin{cases} c_0 = 1/2 \\ c_k = 0 \end{cases}$$

$$d_k = b_k - c_k \qquad d_k \begin{cases} d_0 = 0 \\ d_k = \dfrac{e^{-jk\pi/2} \sin k\pi/2}{k\pi} \end{cases}$$

برای بدست آوردن d_0 می‌توانیم یک دوره تناوب مساحت زیر منحنی را حساب می‌کنیم و بر $1/T$ تقسیم می‌کنیم.

مثال. با توجه به $g(t)$ ضرایب سری فوریه $z(t)$ را بدست آورید

باید رابطه‌ای بین $z(t)$ و $g(t)$ ایجاد کنیم.



Subject
Date

$$g(t) = \frac{d\,z(t)}{dt}$$

$$g(t) \xrightarrow{F_S} d_K \qquad d_K = jk\omega_0 \cdot e_K$$

$$z(t) \xrightarrow{F_S} e_K$$

$$e_K = \frac{d_K}{jk\omega_0} = \frac{d_K}{jk\pi/2}$$

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1\times 4}{2} \times 1/4 = e_0 \\ e_K = \dfrac{e^{-jk\pi/2}\,\sin k\pi/2}{jk^2\pi^2} \end{cases}$$

$1/T$

با استفاده از مشتق $T=2^c$

تمرین فصل ۲ = ۱ _ ۲ _ ۳ _ ۴ _ ۵ _ ۸ _ ۹ _ ۱۴ _ ۱۵
۲۱ _ ۲۴ _

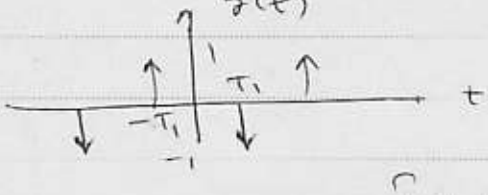
$$\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$$

Subject
Date

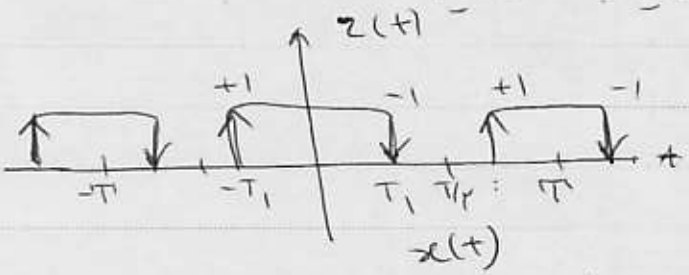
قطار ضربه

مثال. الف) ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t-kT)$ را بدست آورید

ب) با توجه به قسمت الف (سیگنال $x[n]$) و خواص سری فوریه ضرایب سیگنال $g(t)$ را بدست آورید.

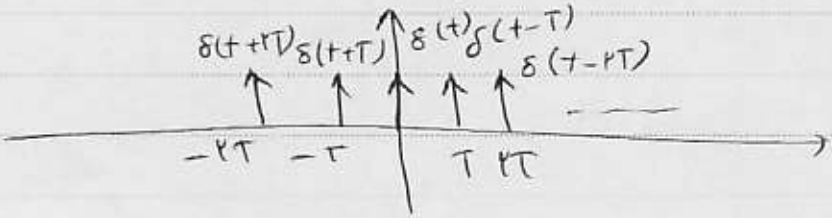


ج) ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



یادآوری $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)x(t) = x(t_0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$



الف) سیگنال قطار ضربه

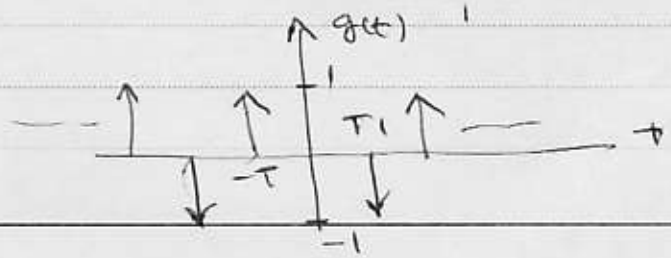
$$a_k = 1/T \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad k \neq 0$$

$$a_0 = 1/T \int_T x(t)dt \quad k = 0$$

$$a_k = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = 1/T\, e^0 = 1/T$$

$$a_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 1/T \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)dt}_{1} = 1/T$$

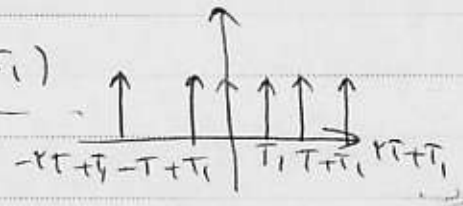
ب)

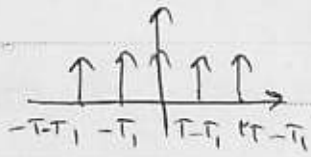


Subject
Date

$x(t) \xrightarrow{F_s} a_k = 1/T \qquad x_1(t) = x(t+T_1)$

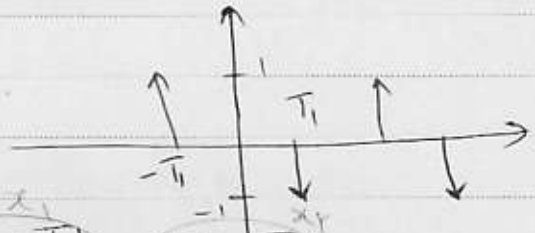
$x(t-T_1)$





این ۲ تا رو نفهمیدم
چه طور دیاگرامشه

$g(t) =$



$g(t) = \underbrace{x(t+T)}_{x_1} - \underbrace{x(t-T)}_{x_2}$

$g(t) \xrightarrow{F_s} d_k$

$x_1(t) \longrightarrow b_k$

$x_2(t) \longrightarrow c_k$

$d_k = b_k - c_k$

همان زمانی

$x_1(t) = x(t+\overset{-T_1}{T_1}) \xrightarrow{F_s} e^{+jk\omega \cdot T_1} a_k$

$x_2(t) = x(t-\overset{T_1}{T_1}) \xrightarrow{F_s} e^{-jk\omega \cdot T_1} a_k$

$d_k = e^{jk\omega \cdot T_1} a_k - e^{-jk\omega \cdot T_1} a_k$

$= a_k (e^{jk\omega \cdot T_1} - e^{-jk\omega \cdot T_1})$

$d_k = \frac{1}{T} 2j \left(\frac{e^{jk\omega \cdot T_1} - e^{-jk\omega \cdot T_1}}{2j} \right)$

$\Rightarrow d_k = \frac{2j}{T} \sin(k\omega \cdot T_1)$

Subject
Date

سری فوریه گسسته

برای تحلیل سیگنال‌های متناوب می‌توانیم از سری فوریه استفاده کنیم.

ضرایب مختلفی از ω_0 سیگنال‌های متفاوتی را بوجود می‌آورد.

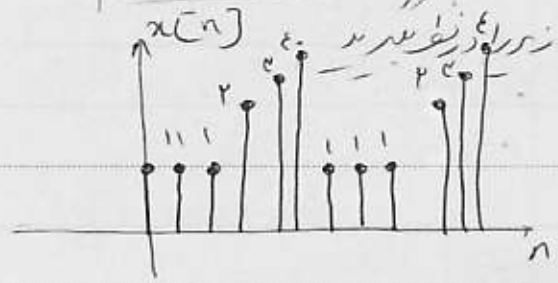
$x[n] = x[n+N]$ دوره تناوب N دارد

$x[n] \longrightarrow a_k$ N عدد صحیح است.

ω_0 فرکانس پایه

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

سیگنال $x[n]$ بصورت زیر را در نظر بگیرید



$N = 6$

دوره تناوب نمی‌تواند عدد صحیح باشد.

$\cos\left(\frac{7\pi}{23}\right)t \longrightarrow T = 46/7$

$\cos\left(\frac{7\pi}{23}\right)n \longrightarrow N = 46/7 \times 7 = 46$

$$\boxed{\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n}}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

PAPCO

Subject
Date

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$\phi_0[n] = \phi_N[n] \longrightarrow \underbrace{e^{j\cdot 0\cdot\omega_0 n}}_{1} = e^{jN\omega_0 n} = e^{jN\frac{2\pi}{N}\times n}$$

$$\phi_1[n] = \phi_{1+N}[n] \qquad = e^{j2\pi n} = \underbrace{\cos 2\pi n}_{1} + \cancel{j\sin 2\pi n}$$

$$\phi_k[n] = \phi_{k+N}[n] \longrightarrow e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$$

$$= e^{jk\omega_0 n} \times \underbrace{\cancel{e^{jN\omega_0 n}}}_{1}$$

=) تعداد سیگنال های متفاوتی که می توانیم داشته باشیم N تا است.

$$\phi_k[N] = \phi_{k+2N}[n]$$

بسط $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt & k \neq 0 \\ a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt & k = 0 \end{cases}$$

سری $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$

حالت تکراری دارد.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] & k = 0, \pm N, \ldots \\ a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N \ldots \end{cases}$$

$a_k = a_{k+N}$

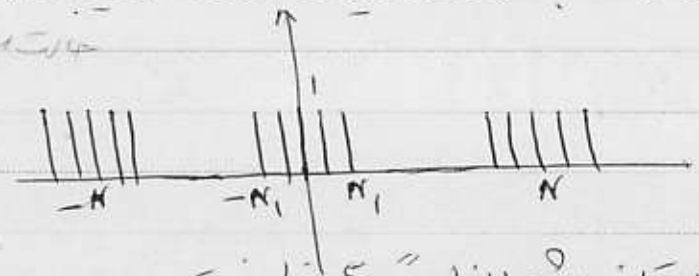
$a_k = a_{k+2N}$

Subject
Date

~~X~~ ثابت در امتحان نمی آید.

X مثال. $x[n]$ به صورت زیر داده شده ضرایب سری فوریه $x[n]$ را بدست آورید.

حالت مدعی سیگنال همان پنج سیگنال base با استفاده از این سیگنال سیگنال های دیگر را تولید می کنیم و بدست می آوریم.



بیشتر از 5 خطی می تواند باشد الزاماً 5 خطی نیست.

$$\boxed{\begin{array}{l} n=0 \text{ تا } N-1 \\ n=-N/2 \text{ تا } N/2-1 \end{array}}$$

← N دوره ی تناوب

یک دوره تناوب

$$\begin{cases} a_0 = 0 & k=0,\pm N,\ldots \\ a_k = 0 & k \neq 0, \pm N, \pm 2N \ldots \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{n=N/2-1} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1+N_1}^{N_1+N_1} 1\, e^{-jk\omega_0 n}$$

اندیس $\sum$ را با N_1+ جمع کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$$

PAPCO

Subject
Date

$m = n + N_1$

$n = m - N_1$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\omega_0(m-N_1)}$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} \overbrace{e^{-jk\omega_0 m}}^{e^{-jk\omega_0 n}\, e^{jk\omega_0 N_1}} = \frac{e^{jk(\frac{2\pi}{N})N_1}}{N_1} \frac{1-e^{-jk(\frac{2\pi}{N})(2N_1+1)}}{1-e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{jk(2\pi/N)(N_1)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{jk(2\pi/N)}} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(\frac{2\pi}{2N})}\left(e^{jk2\pi/N(N_1+1/2)} - e^{-jk(2\pi/N)(N_1+1/2)}\right)/2j}{e^{-jk(2\pi/2N)}\left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk2\pi/2N}\right)/2j}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin k(2\pi/N)(N_1+1/2)}{\sin(k\pi/N)}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin k(2\pi/N)(N_1+1/2)}{\sin(k\pi/N)}}$$

$$a_0 = \boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1$$

$$N_1 - (-N_1) + 1 = 2N_1 + 1$$

$$= \frac{2N_1+1}{N}$$

Subject
Date

تمام خواص گفته شده برای سیگنال پیوسته برای سیگنال گسسته هم هست.

- خطی بودن
- جابجایی زمانی
- وارونگی زمانی
- ضرب در کانولوشن
- پارسوال
- مزدوج

به طور مثال خطی بودن

$$x[n] \xrightarrow{F_s} a_k$$

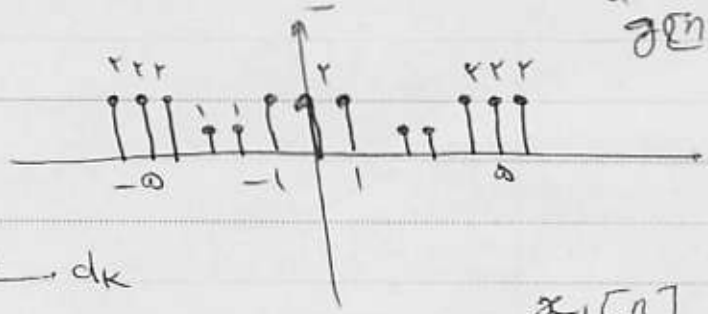
$$y[n] \xrightarrow{F_s} b_k$$

$$Ax[n] + By[n] \xrightarrow{F_s} Aa_k + Bb_k$$

$$x[n-n_0] \xrightarrow{f_s} e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$$

مثال. سیگنال $g[n]$ به صورت زیر داده شده ضرایب سری فوریه $g[n]$ را با توجه به مثال قبل و خواص سری فوریه بدست آورید.

$g[n]$



$$g[n] \xrightarrow{f_s} d_k$$

$x_1[n]$

$$x_1[n] \longrightarrow b_k$$

$N_1 = 1$

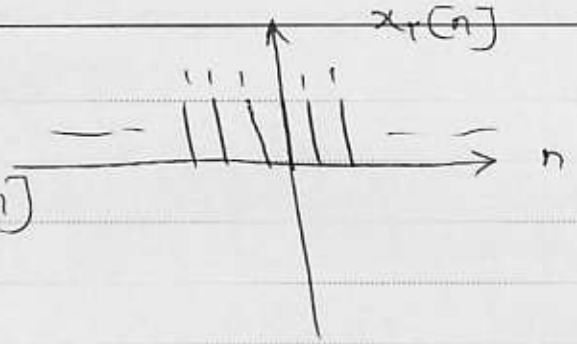
$N = 5$

$$b_k \begin{cases} b_k = \frac{1}{5} \dfrac{\sin \frac{k3\pi}{5}}{\sin \frac{k\pi}{5}} \\ b_0 = 3/5 \end{cases}$$

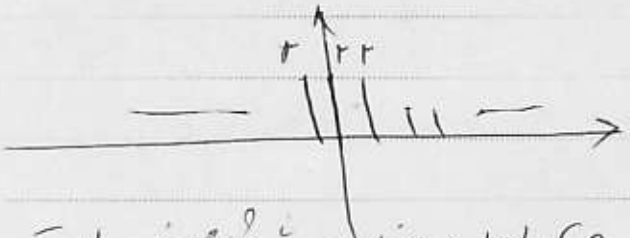
PAPCO

Subject
Date

$x_2[n] = 1$



$g[n] = x_1[n] + x_2[n]$



ضرایب سری فوریه $x_2[n]$ فقط c_0 را دارد و ضرایب دیگر صفر است.

$$x_2[n] \xrightarrow{F_s} c_k \quad \begin{cases} c_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] = \frac{1}{N}\times N = 1 \\ c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\,\frac{1-\cancelto{1}{e^{-jk\omega_0 N}}}{1-e^{-jk\omega_0}} = 0$$

از رابطه زیر $\sum_{n=0}^{N} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$ استفاده می‌کنیم

$$e^{-jk\omega_0 N} = e^{-jk2\pi/N\, N} = e^{-jk2\pi}$$

$$\Rightarrow c_k = 0 \qquad \Rightarrow d_k = \begin{cases} d_0 = c_0 + b_0 = 1/5 \\ d_k = \frac{1}{5}\,\frac{\sin k2\pi/5}{\sin k\pi/5} \end{cases}$$

Subject
Date

سری فوریه و سیستم های LTI خطی تغییر ناپذیر با زمان

$$x(t) = e^{st} \xrightarrow{LTI} y(t) = H(s)e^{st}$$

$$s = j\omega \qquad H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d(\tau)$$

$$\omega = k\omega_0 \qquad \omega = k\omega_0$$

پاسخ فرکانسی سیستم $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

ضرایب سری فوریه ورودی

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

ضرایب سری فوریه خروجی

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k$$

$$y(t) \xrightarrow{f_s} b_k$$

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

برای گسسته در زمان هم به همین صورت است.

$$x[n] = z^n \longrightarrow y[n] = H(z)z^n$$

$$\boxed{z = e^{j\omega}}$$

سری فوریه

$$\boxed{\omega = k\omega_0}$$

PAPCO

Subject
Date

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}$$

حالتی که z فقط شامل قسمت موهومی باشد.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j\omega n}$$

برای بدست آوردن ضرایب سری فوریه

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\omega_0 n}$$

خروجی $y[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, H(e^{jk\omega_0})\, e^{jk\omega_0 n}$$

$$y[n] = \longrightarrow b_k$$

$$b_k = a_k\, H(e^{jk\omega_0})$$

ضرایب سری فوریه ورودی را در پاسخ فرکانسی سیستم ضرب می‌کنیم. تا ضرایب سری فوریه خروجی بدست بیاید

مثال. پاسخ ضربه سیستم و $x(t)$ داده شده.

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k\, e^{jk2\pi t}$$

$a_0 = 1$

$a_1 = a_{-1} = 1/3$

$a_2 = a_{-2} = 1/3$

$a_3 = a_{-3} = 1/3$

$y(t)$ ضرایب سری فوریه = ?

پاسخ فرکانسی سیستم

$$\boxed{h(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+j\omega)}\, dt = \frac{-1}{1+j\omega}\, e^{-t(1+j\omega)}\Big]_0^{\infty}$$

مثبت

Subject
Date

$$= \frac{1}{1+j\omega}$$

$$y(t) \xrightarrow{F_s} b_k$$

$$\boxed{H(jk\omega_0) = \frac{1}{1+jk\omega_0}}$$

$$b_0 = a_0 \Rightarrow b_1 = \frac{1/4}{1+j2\pi}$$

$$b_2 = \frac{1/2}{1+4j\pi}$$

$$b_{-1} = \frac{1/4}{1-j2\pi} \qquad b_{-2} = \frac{1/2}{1+(-2)j2\pi} = \frac{1/2}{1-4j\pi}$$

مثال.

$$x[n] = \cos(2\pi/N)\, n$$

$$h[n] = \alpha^n u[n] \qquad -1 < \alpha < 1$$

$y[n] = ?$ سری فوریه خروجی

$$x[n] = \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j2\pi/N\, n}}{2} = \underbrace{1/2\, e^{j2\pi/N \times n}}_{a_1} + \underbrace{1/2\, e^{-j2\pi/N \times n}}_{a_{-1}}$$

$$a_1 = a_{-1} = 1/2$$

$$h(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j\omega n}$$

PAPCO

Subject
Date

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{\alpha e^{-j\omega}}_{\beta}\right)^n =$$

$$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \Rightarrow \boxed{H(jk\omega_0) = \frac{1}{1-e^{-jk2\pi/N}}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{1}{1-\beta}}$$

$$y[n] = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{-j2\pi/N}}}_{b_1} e^{j2\pi/N\, n} +$$

$$+ \underbrace{1/2 \frac{1}{1-e^{jk2\pi/N}}}_{b_{-1}} e^{+j2\pi/N\, n}$$

Subject
Date

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه

تعمیم یافته سری فوریه است. هم برای سیگنال های متناوب و هم غیرمتناوب استفاده می شود.

سیگنال را از حوزه ی زمان به حوزه ی فرکانس می بریم.

حوزه زمان — حوزه فرکانس

$$t \xrightarrow{F} \omega$$

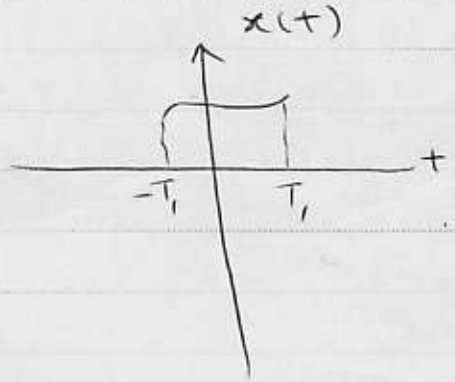
$$\omega \xrightarrow{F^{-1}} t$$

$$f(t) \xrightarrow{F} F(j\omega)$$

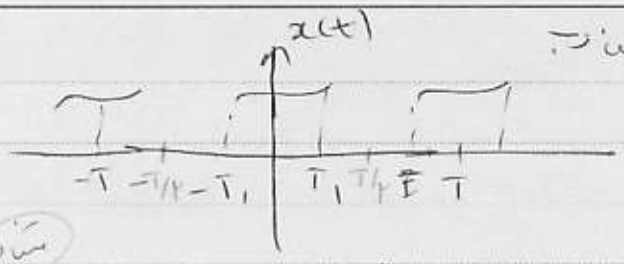
$$F(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} f(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{aligned}}$$

سیگنال نامتناوب



Subject
Date



شکل متناوب

در یک بازه زمانی تک ضابطه هستند

متناوب

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

تبدیل فوریه

$$a_k = \boxed{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$$

این همان رابطه تبدیل فوریه است

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

شکل متناوب را برحسب سری فوریه نوشتیم.

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}\, \omega$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X(jk\omega_0) e^{j\frac{k\omega}{\omega} t}\, \omega$$

$T \to \infty$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega}$$

عکس تبدیل فوریه

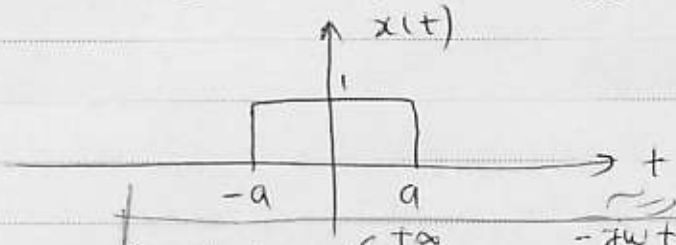
$T \to \infty$

$x(t) = \tilde{x}(t)$ ← در بی‌نهایت

$\omega \to 0$ ⇐

ω به سمت صفر می‌رود.

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را بدست آورید.



تبدیل فوریه

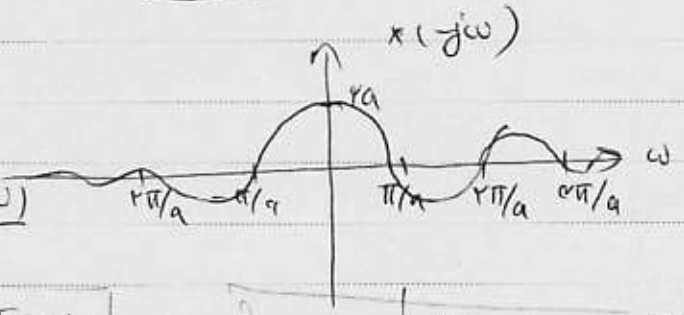
رابطه تبدیل فوریه $\longrightarrow$ $\boxed{f(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big]_{-a}^{a} =$$

$$\frac{e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}}{-j\omega} = \frac{2}{2}\,\frac{e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}}{j\omega} = \frac{2\sin\omega a}{\omega}$$

$$x(t) \xrightarrow{F} \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$



$\boxed{\text{سیگنال سینک} \Rightarrow \underset{\text{یادآوری}}{\operatorname{Sinc} t} = \frac{\sin t}{t}}$

$\omega a = -\pi \Rightarrow \omega = -\pi/a$

$\omega a = \pi \Rightarrow \omega = \pi/a$

$= 2a \operatorname{Sinc} \omega a$

$\Rightarrow a\,\frac{2\sin\omega a}{\omega a}$ = بصورت سینک می‌توانیم بنویسیم

سیگنال‌ها بصورت سیگنال سینک در حوزه‌ی فرکانس می‌باشد.

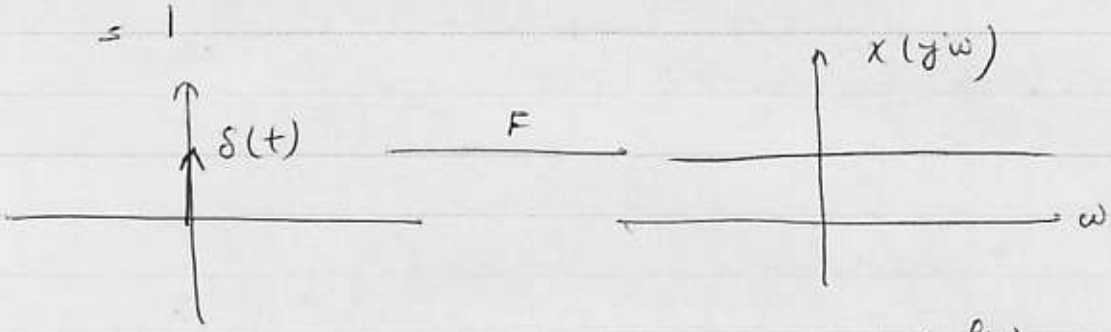
Subject
Date

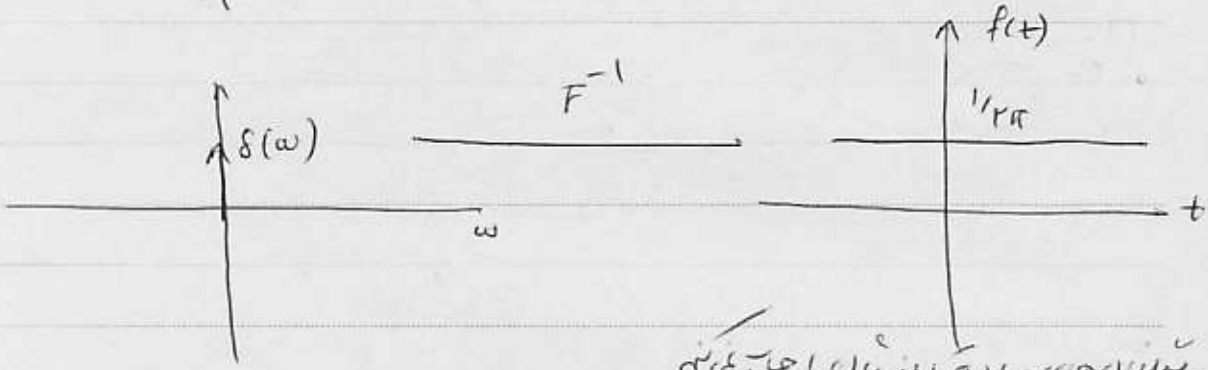
مثال: تبدیل فوریه $\delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= 1$$





$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$

تبدیل‌های پایه را به خاطر می‌سپاریم

$$\delta(t) \xrightarrow{F} 1$$

$$\delta(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{2\pi}$$

$$A\,\delta(t) \xrightarrow{F} A$$

PAPCO

Subject
Date

مثال: $x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xrightarrow{F} ?$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha + j\omega)} dt$$

$$= \frac{1}{-(\alpha+j\omega)} e^{-t(\alpha+j\omega)} \Big]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

که هر دو مختلط مقدار صحیح و موهومی دارد

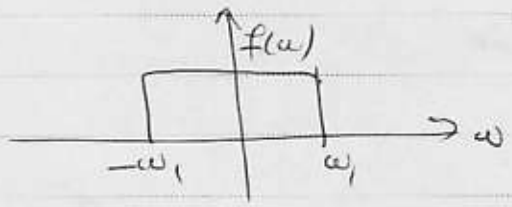
در این عبارت ضرب $\times \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega}$ اگر $\longrightarrow$

تا هم مقدار

$$\frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}}_{R(\omega)} - \underbrace{\frac{j\omega}{\alpha^2+\omega^2}}_{Im(\omega)}$$

عکس آن را اندازه و زاویه آن را هم بخواهند.

مثال: تبدیل فوریه معکوس شکل $F(\omega)$ را بدست آورید.



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$