

**Vấn đề 2 : Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.****Tính đơn điệu của hàm số:**

+ Hàm số  $y = f(x)$  **đồng biến** trên khoảng  $(a;b)$   $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$ .

+ Hàm số  $y = f(x)$  **nghịch biến** trên khoảng  $(a;b)$   $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$ .

**Chú ý :**

+ Điều kiện để tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  **không đổi dấu** trên  $\mathbb{R}$  :

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

**Nếu hệ số a và b có chứa tham số m thì phải xét trường hợp a = 0**

+ Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(a,b)$  thì với

$$a \leq x_1 \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x_1) \leq f(b).$$

Các bước xét tính đơn điệu của hàm số :

B1 : Tìm TXĐ , tính đạo hàm cấp 1 ( $y'$ )

B2 : cho  $y' = 0$  tìm x

B3 : lập bảng biến thiên và kết luận

**Bài 1 : Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây :**

a/  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 13$

b/  $y = 3x^4 - 6x^2 + 2$

c/  $y = x^4 - 5x^2 + 1$

d/  $y = -x^4 - 6x^2 + 8$

e/  $y = x^3 - 3x + 1$

f/  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

g/  $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 25$

h/  $y = -x^3 + x^2 - 3x + \frac{1}{3}$

k/  $y = \frac{2x-2}{x+1}$

l/  $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 1$

$$m/ y = \frac{x+1}{3-x}$$

$$n/ y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$$

$$o/ y = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$$

$$p/ y = -x^4 + 4x^2 - 3$$

**Bài 2 (soạn) :** Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây :

$$1/ y = x^4 - 2x^2 + \frac{3}{2}$$

$$2/ y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$$

$$3/ y = 2x^3 + 3x + 1$$

$$4/ y = \frac{3x+1}{x+2}$$

$$5/ y = (x-2)^3 - 3x + 4$$

$$6/ y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$7/ y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1$$

$$8/ y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$$

$$9/ y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$10/ y = x^3 - 3x^2 + 9x + \frac{2}{3}$$

$$11/ y = x^3 - 8x^2 + 16x + \frac{2}{5}$$

$$12/ y = 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}$$

$$13/ y = x^3 - 9x^2 + 9x - \frac{7}{4}$$

$$14/ y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}$$

$$15/ y = \frac{x-3}{2-x}$$

$$16/ y = \frac{-2x}{3+x}$$

**Bài 3 :** Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây :

$$a) y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$$

$$b) y = -5x^3 + 3x^2 - 4x + 5$$

$$c) y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 3$$

$$d) y = x^3(1-x^2)^2$$

**Bài 4 :** Tìm m để các hàm số sau luôn giảm trên từng khoảng xác định :

$$a/ y = \frac{mx-1}{x+2}$$

$$b/ y = \frac{m^2x-1}{-4x+1}$$

$$c/ y = -\frac{x^3}{3} + x^2 - (m-3)x + \frac{11}{5}$$

$$d/ y = -x^3 + (3-m)x^2 - 2mx + 2$$

**Bài 5 :** Tìm m để các hàm số sau luôn tăng trên từng khoảng xác định :

$$a/ y = \frac{mx+4}{x-4}$$

$$b/ y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 2(m^2+2)x - 4$$

$$c/ y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 - (3m-1)x + m^2$$

$$d/ y = \frac{x^3}{3} - (m+4)x^2 - (m-2)x + 5m^4$$

$$e/ y = (m-2)\frac{x^3}{3} - (2m-3)x^2 + (5m-6)x + 2$$

**Bài 6 (soạn):** Tìm m để các hàm số sau :

$$a/ y = \frac{mx+1}{x+m} \text{ luôn giảm trên từng khoảng xác định}$$

$$b/ y = \frac{x-m}{x+3} \text{ luôn tăng trên từng khoảng xác định}$$

$$c/ y = x^3 + 3mx^2 + 3x - 1 \text{ luôn tăng trên } \mathbb{R} \text{ (Đs : } -1 \leq m \leq 1 \text{)}$$

$$d/ y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9 \text{ luôn tăng (Đs : } m \leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } m \geq \frac{-1+3\sqrt{3}}{2} \text{)}$$

$$e/ y = x^3 - 3x^2 + (2m+1)x - 4 \text{ Đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ (Đs : } m \geq 1 \text{)}$$

$$f/ y = \frac{2x-1}{x-m} \text{ nghịch biến trên từng khoảng xác định (Đs : } m > \frac{1}{2} \text{)}$$

$$g/ y = -x^3 + (m+2)x^2 + (m-1)x - 3 \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \text{ (Đs: } \frac{-7-3\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{-7+3\sqrt{5}}{2} \text{)}$$

$$h/ y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m+1)x + 9 \text{ đồng biến với mọi } x \text{ (Đs : } m \geq 3 \text{)}$$

k/  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - 1$  luôn tăng trên  $\mathbb{R}$  (Đs :  $-2 \leq m \leq 2$  )

l/  $y = x^3 + mx^2 + 4x + 3$  luôn tăng trên  $\mathbb{R}$  (Đs :  $-2\sqrt{3} \leq m \leq 2\sqrt{3}$  )

**Bài 7 :** Tìm m để :

a/ (**ĐHQG Tp.HCM – 2000**) Hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$  nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1

b/ Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 - (m+1)x - 3$  nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 5

c/ Hàm số  $y = -x^3 + m^2x^2 + mx + 3m + 5$  đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3

**Bài 8 :** Tìm a để hàm số  $y = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a+1)x^2 + 3x + 5$  luôn đồng biến trên từng khoảng xác định ? (Đs:  $a \leq -1 \vee a \geq 2$  )

**Bài 9 :** Tìm m để hàm số  $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$  luôn đồng biến với mọi x ? (Đs:  $m \geq 2$  )

**Bài 10 :** CMR hàm số  $y = -x^3 + (m+1)x^2 - (m^2 + 2)x + m$  luôn nghịch biến

**Bài 11 :** Tìm m để hàm số  $y = x^3 - 2(m-1)x^2 + (2m^2 - m + 2)x + m - 3$  luôn đồng biến

**Bài 12 :** Tìm a để hàm số sau đây luôn giảm

a/  $y = -x^3 + (a+1)x^2 - (2a+1)x - 3$                       b/  $y = \frac{ax + a - 7}{5x - a + 3}$

**Bài 13 (ĐH Thủy lợi – 1997) :** tìm m để hàm số sau đồng biến trên  $\mathbb{R}$

$$y = \frac{m-1}{3}.x^3 + m.x^2 + (3m-2).x$$